ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

1ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η $f:R\to R$ για την οποία ισχύει

$2f(x)-3f(-x) = 5x-4$, για κάθε $x\in R$

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}\left[(f(x)-4)\ \eta\mu\frac{2}{x}\right]$

γ) Αν είναι $(gof)(x)=x^2-1$, για κάθε $x\in R$, να βρείτε τον τύπο της g.

2ο ΘΕΜΑ

Να βρείτε τον γεωμετρικό τύπο του z όταν οι εικόνες των $1, z, 1+z^2$ είναι συνευθειακά σημεία με $Im(z)\neq 0$.

3ο ΘΕΜΑ

Έστω $z\in C$ με $z\neq 0$ και ισχύει $\bar{z}=z^5\cdot|z|$

α) Να βρείτε το $|z|$

β) Δείξτε ότι $z^6=1$

γ) Να βρείτε τον z

4ο ΘΕΜΑ

Αν για την συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει

$f^3(x) + 2f(x) + 2x = 4$, για κάθε $x\in R$ να δείξετε ότι:

α) Η f είναι συνάρτηση 1-1

β) Να βρείτε την f^{-1}

γ) Να βρείτε το $\lim_{x\to 0}\left[\left(4-2f^{-1}(x)\right)\cdot\eta\mu\frac{2}{x}\right]$

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Δίνεται ότι $2f(x)-3f(-x) = 5x-4$,για κάθε $x\in R$ θέτουμε όπου x το -x και έχουμε $2f(-x)-3f(x) = -5x-4$. Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2f(x) - 3f(-x) = 5x - 4 \\ -3f(x) + 2f(-x) = -5x - 4 \end{cases}$$

και παίρνουμε $f(x)=x+4$

β) $\lim_{x\to+\infty}\left[(f(x)-4)\cdot\eta\mu\frac{2}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[(x+4-4)\cdot\eta\mu\frac{2}{x}\right] =$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Θέτω $\frac{2}{x}=\omega$ οπότε το όριο γράφεται

$\lim_{\omega\to 0}\frac{2\eta\mu\omega}{\omega}=2$

γ) Δίνεται $(gof)(x) = x^2-1 \Leftrightarrow g(f(x))=x^2-1 \Leftrightarrow g(x+4)=x^2-1$.

Αν $x+4 = \omega$ τότε $g(\omega)=(\omega-4)^2-1 \Leftrightarrow g(\omega)=\omega^2-8\omega+15$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Έστω $z=x+yi$ άρα $M(z)=M(x,y)$ και $1=1+0i\to A(1,0)$. Επίσης

$1+z^2= 1+(x+yi)^2= 1+x^2- y^2+2xyi=(x^2- y^2+1) + 2xyi \to N(x^2- y^2+1, 2xy)$

Είναι $\overrightarrow{AM}= (x-1,y)$

$\overrightarrow{AN}= (x^2- y^2+1-1, 2xy)=(x^2-y^2, 2xy)$

Αφού Α,Μ, Ν συνευθειακά άρα $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ συγγραμμικα.

$$\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y \\ x^2-y^2 & 2xy \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2xy) - (x^2-y^2)y=0 \Leftrightarrow 2x^2y-2xy-x^2y+y^3=0 \Leftrightarrow x^2y-2xy+y^3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(x^2-2x+y^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0\to \text{ατοπο} \\ x^2-2x+y^2=0 \end{cases} \Rightarrow (x^2-2x+1)+y^2=1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

Άρα κύκλος με Α(1,0) και ρ=1

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Είναι $\bar{z}=z^5\cdot|z|$ άρα $|\bar{z}|=|z^5\cdot|z||$

$\Leftrightarrow |z| = |z|^5\cdot|z| \Leftrightarrow |z| = |z|^6 \Leftrightarrow |z|^5 = 1 \Leftrightarrow |z|=1$

β) $\bar{z} = z^5\cdot|z| \Leftrightarrow \bar{z} = z^5\cdot 1 \Leftrightarrow z^5=\bar{z} \Leftrightarrow z^6 = z\cdot\bar{z} \Leftrightarrow z^6 = |z|^2 \Leftrightarrow z^6 = 1$

γ) $z^6 = 1 \Leftrightarrow z^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^3+1)(z^3-1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^3+1=0 \Leftrightarrow z=-1 \ \acute{\eta} \ z=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2} \\ z^3-1=0 \Leftrightarrow z=1 \ \acute{\eta} \ z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) $f^3(x) + 2f(x) + 2x = 4 \Leftrightarrow f^3(x) + 2f(x) - 4 = -2x$ Για κάθε $x_1, x_2\in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε

$$\left.\begin{aligned} f^3(x_1) &= f^3(x_2) \\ 2f(x_1) &= 2f(x_2) \end{aligned}\right\}$$ προσθέτω κατά μέλη

$f^3(x_1)+2f(x_1)-4=f^3(x_2)+2f(x_2)-4$ οπότε προκύπτει ότι $-2x_1=-2x_2$ άρα $x_1=x_2$ επομένως η f είναι “1-1”

β) Η f είναι “1-1” άρα αντιστρέψιμη. Αν $f(x)=y$ τότε $f^3(x) + 2f(x) + 2x = 4$ γίνεται

$y^3+2y-4=-2x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}y^3-y+2$ άρα

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^3 - x + 2,\ x\in R$

γ) $\left(4-2f^{-1}(x)\right)\cdot\eta\mu\frac{2}{x} = \left[4-2\left(-\frac{1}{2}x^3-x+2\right)\right]\cdot\eta\mu\frac{2}{x} =$

$= (4+x^3+2x-4)\cdot\eta\mu\frac{2}{x} = (x^3+2x)\cdot\eta\mu\frac{2}{x}$

Όμως

$\left|(x^3+2x)\cdot\eta\mu\frac{2}{x}\right| \le |x^3+2x| \Leftrightarrow -|x^3+2x| \le (x^3+2x)\cdot\eta\mu\frac{2}{x} \le |x^3+2x|$

$\lim_{x\to 0}\left(-|x^3+2x|\right) = \lim_{x\to 0}|x^3+2x| = 0$ άρα και

$\lim_{x\to 0}\left[(x^3+2x)\cdot\eta\mu\frac{2}{x}\right] = 0$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ. ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**